



# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

IDROKINEMATICA



# Campi di velocità e traiettorie

## ► Campo di velocità in una massa fluida

- Rappresentazione analitica

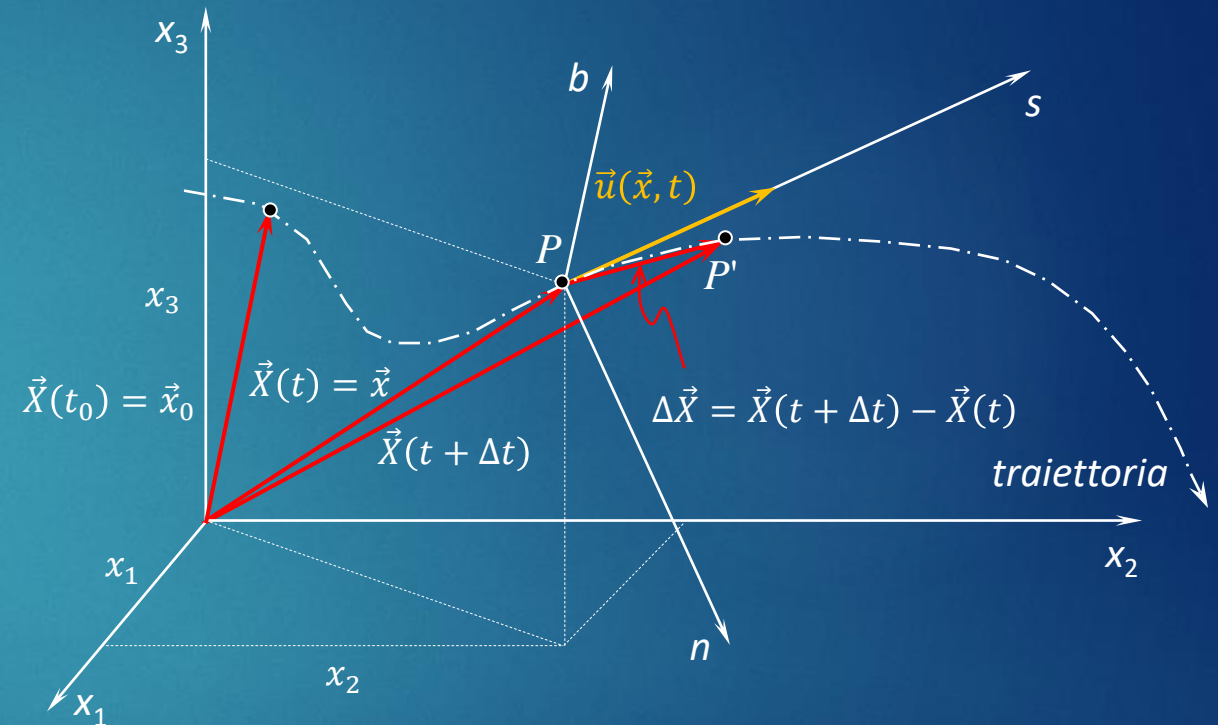
$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

- ✓ in ogni punto della massa fluida, identificato dal vettore posizione  $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)^T$ , è definito un valore del vettore velocità  $\vec{u}$ , in generale dipendente dal tempo  $t$

- Definizione del vettore velocità in un punto

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{X}(t+\Delta t) - \vec{X}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{X}}{\Delta t} = \frac{d\vec{X}}{dt}$$

- $\vec{X}(t) = \vec{x}$  posizione particella al tempo  $t$
- $\vec{X}(t + \Delta t)$  posizione particella al tempo  $t + \Delta t$
- $\Delta \vec{X}$  spostamento della particella nell'intervallo  $\Delta t$



$$u_i(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_i(t+\Delta t) - X_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X_i}{\Delta t} = \frac{dX_i}{dt}$$

$$\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)^T \quad ; \quad \vec{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)^T$$



# Campi di velocità e traiettorie

## ► Ricostruzione delle traiettorie

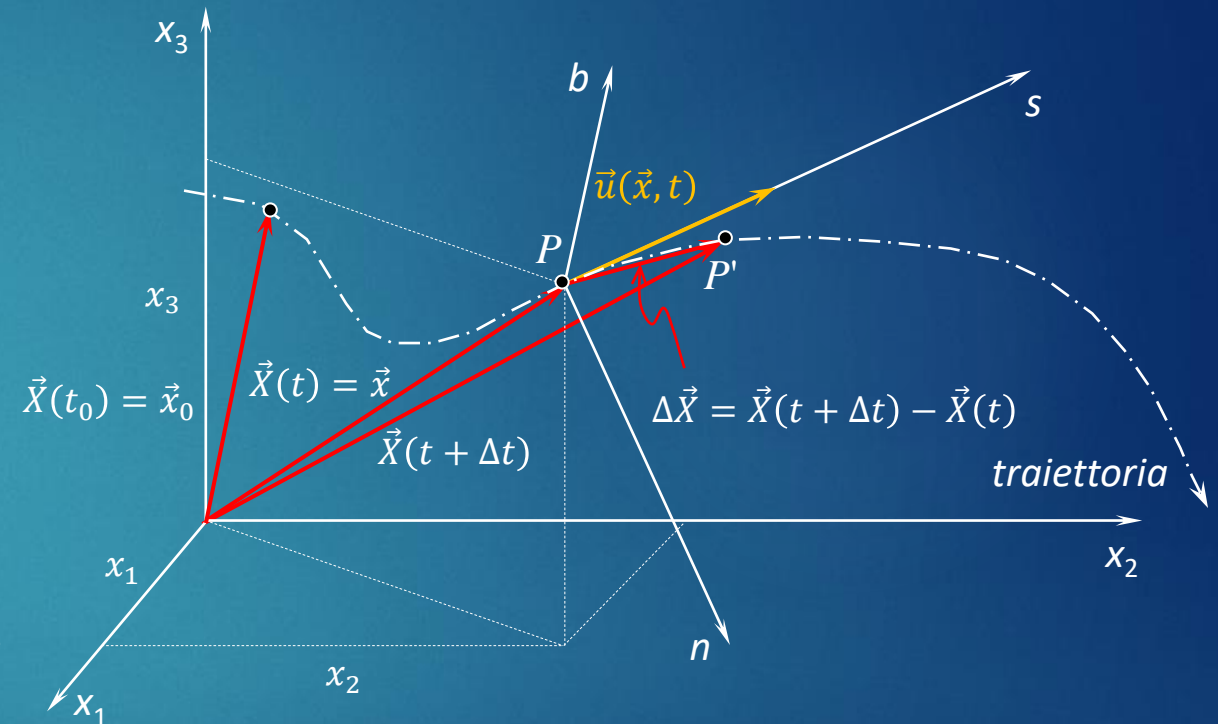
- Definizione velocità in un punto  $\vec{x}$  al tempo  $t$

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{X}}{dt} \quad (\vec{x}, t \text{ arbitrari})$$

- velocità di una particella al tempo  $t$  nella posizione  $\vec{X}(t)$  da essa occupata

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t) = \frac{d\vec{X}}{dt} \longrightarrow u_i = u_i(\vec{X}, t) = \frac{dX_i}{dt}$$

- ✓ Equazione differenziale vettoriale del 1° ordine (sistema di 3 equazioni differenziali scalari del 1° ordine)
- ✓ Condizione iniziale:  $\vec{X}(t_0) = \vec{x}_0$
- Espressione formale delle traiettorie del campo  
 $\vec{X}(t; \vec{x}_0)$        $\vec{x}_0$  parametro ( $\infty^3$  valori)



- $X_i(t; \vec{x}_0)$  componenti scalari di  $\vec{X}$  (coordinate particella)
- ✓  $\infty^3$  traiettorie nel campo di moto (quante le  $\vec{x}_0$ )
- ✓ Forme traiettorie si ottengono eliminando il tempo



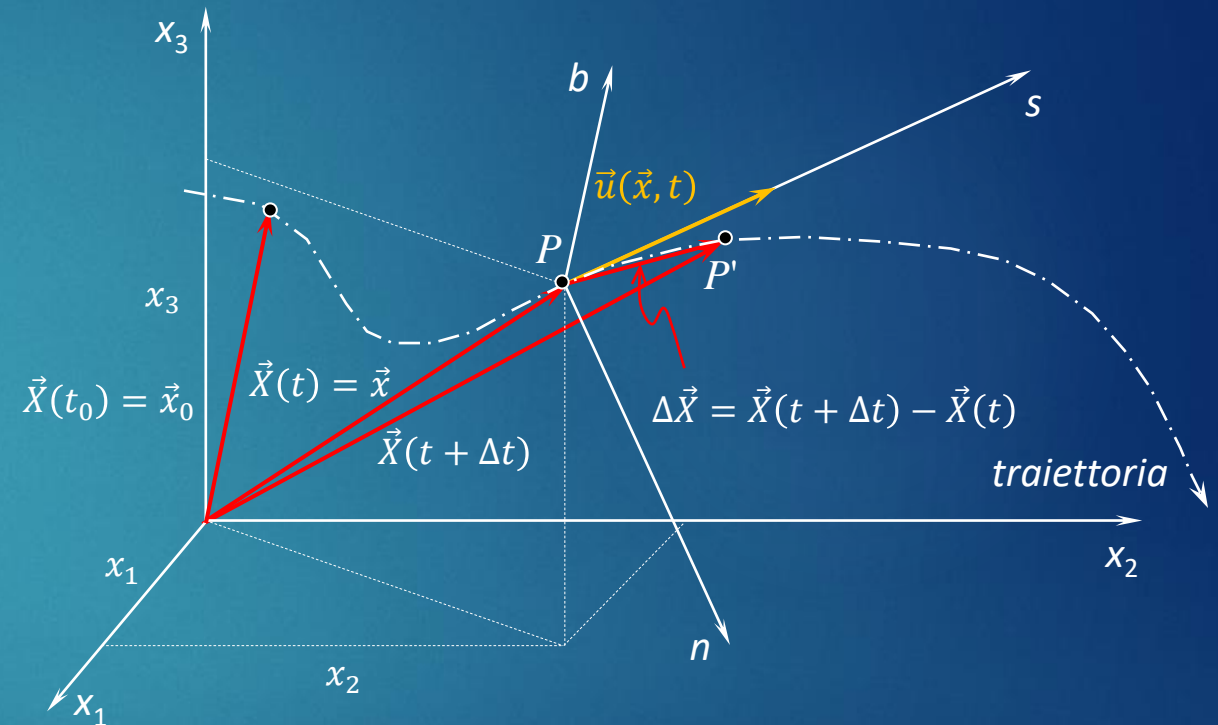
# Punti di vista Euleriano e Lagrangiano

- Osservazione di una grandezza  $\vartheta(\vec{x}, t)$
- Punto di vista Euleriano (o *locale*)
  - valori di  $\vartheta$  misurati nel punto  $\vec{x}$  al trascorrere del tempo  $t$ 

$$\vartheta_E(t) = \vartheta(\vec{x}, t)_{\vec{x}=\text{cost}}$$
    - ✓ valori misurati di particelle sempre diverse che, al trascorrere del tempo, passano per il punto
- Punto di vista *Lagrangiano* (o *materiale*)
  - valori di  $\vartheta$  misurati sempre per la stessa particella, nelle posizioni da essa occupate al trascorrere del tempo  $t$

✓ Ci si vincola ad assumere  $\vec{x} = \vec{X}(t; \vec{x}_0)$

$$\vartheta_L(t) = \vartheta(\vec{X}(t; \vec{x}_0), t)_{\vec{x}_0=\text{cost}} = \vartheta(t; \vec{x}_0)_{\vec{x}_0=\text{cost}}$$



- ✓ P.d.v. Lagrangiano anche detto *sostanziale*
- $\infty^1$  misure ottenute con ciascuna delle modalità di osservazione (singolo punto, singola traiettoria)
- Descrizione completa del campo di  $\vartheta$  ( $\infty^4$  misure) con  $\infty^3$  osservatori Euleriani o  $\infty^3$  osservatori Lagrangiani





# Derivate Euleriana e Lagrangiana

► Campo di una generica grandezza  $\vartheta(\vec{x}, t)$

► Punto di vista *Euleriano* (locale)

$$\vartheta_E(t) = \vartheta(\vec{x}, t)_{\vec{x}=\text{cost}}$$

• Derivata *Euleriana* (o *locale*)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vartheta(\vec{x}, t + \Delta t) - \vartheta(\vec{x}, t)}{\Delta t} = \left. \frac{d\vartheta}{dt} \right|_{\vec{x}=\text{cost}}$$

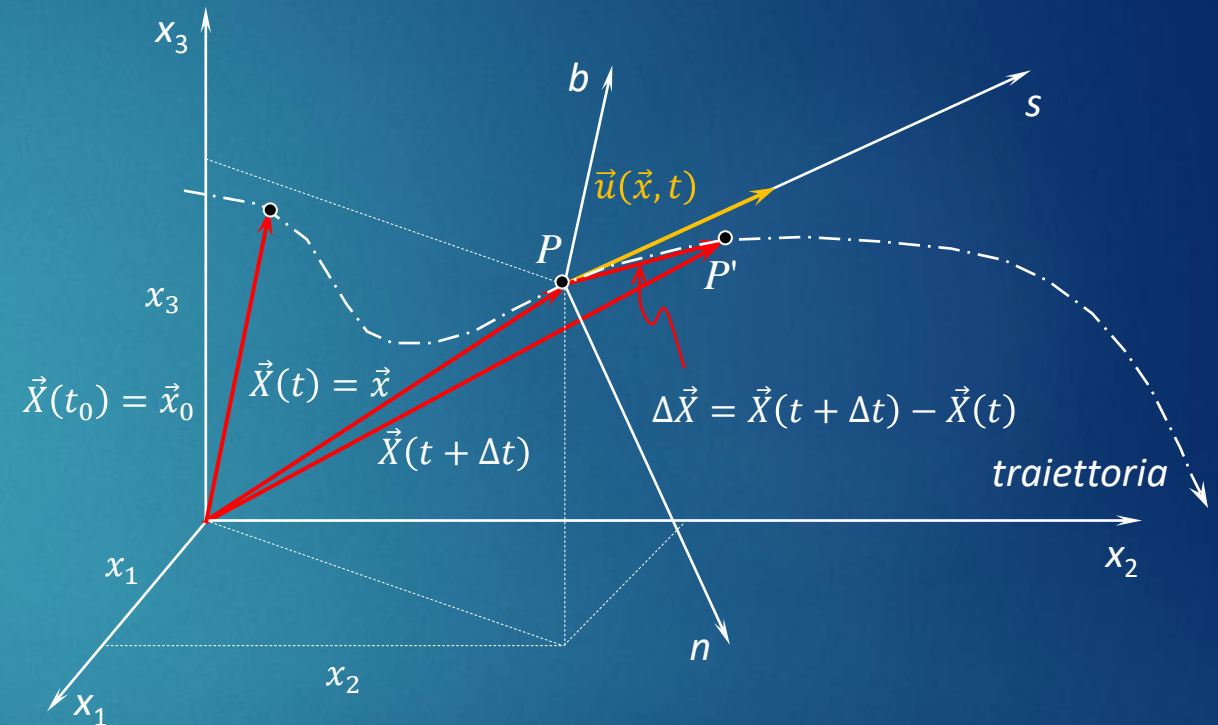
► Punto di vista *Lagrangiano* (materiale, sost.)

$$\vartheta_L(t) = \vartheta(\vec{X}(t; \vec{x}_0), t)_{\vec{x}_0=\text{cost}} = \vartheta(t; \vec{x}_0)_{\vec{x}_0=\text{cost}}$$

• Derivata *Lagrangiana* (materiale, sostanziale)

$$\frac{D\vartheta}{Dt}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vartheta(t + \Delta t; \vec{x}_0) - \vartheta(t; \vec{x}_0)}{\Delta t} = \left. \frac{d\vartheta}{dt} \right|_{\vec{x}_0=\text{cost}}$$

✓  $\vec{x}_0$  fissato in modo che  $\vec{X}(t; \vec{x}_0) = \vec{x}$



- $d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} dx_i$
- Spostamento lungo la traiettoria  $\Rightarrow dx_i = dX_i|_{\vec{x}_0=\text{cost}}$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = \left. \frac{d\vartheta}{dt} \right|_{\vec{x}_0=\text{cost}} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \frac{dX_1}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \frac{dX_2}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} \frac{dX_3}{dt}$$



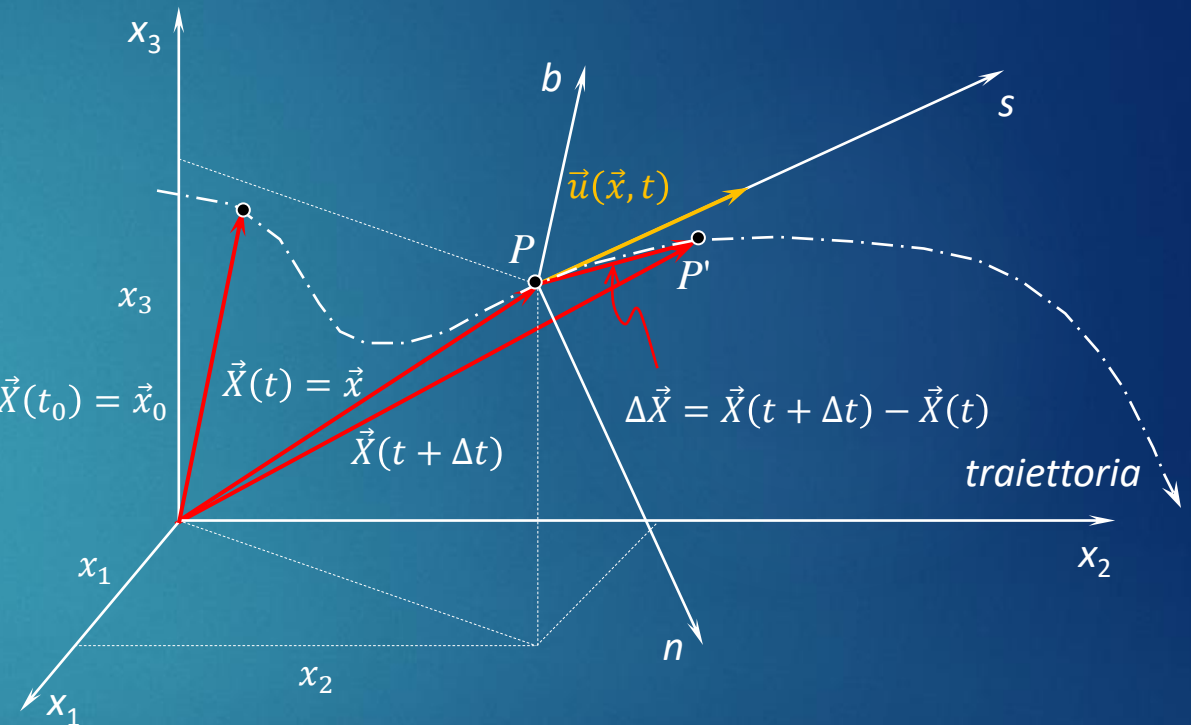
# Regola di derivazione Lagrangiana

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \Big|_{\vec{x}_0 = \text{cost}} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \frac{dX_1}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \frac{dX_2}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} \frac{dX_3}{dt}$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{X}}{dt} \quad ; \quad u_i = \frac{dX_i}{dt}$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} u_3 = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} u_i$$

$$\boxed{\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} u_i}$$



✓  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} u_i$  forma Cartesiana del prodotto scalare  $\nabla \vartheta \cdot \vec{u}$   $\longrightarrow$

$$\boxed{\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \nabla \vartheta \cdot \vec{u}}$$



# Accelerazione di una particella

## ► Punto di vista Lagrangiano

$$\begin{aligned}\vec{a}(\vec{x}, t) &= \frac{D\vec{u}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}[\vec{X}(t+\Delta t; \vec{x}_0), t+\Delta t] - \vec{u}[\vec{X}(t; \vec{x}_0), t]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t; \vec{x}_0) - \vec{u}(t; \vec{x}_0)}{\Delta t}\end{aligned}$$

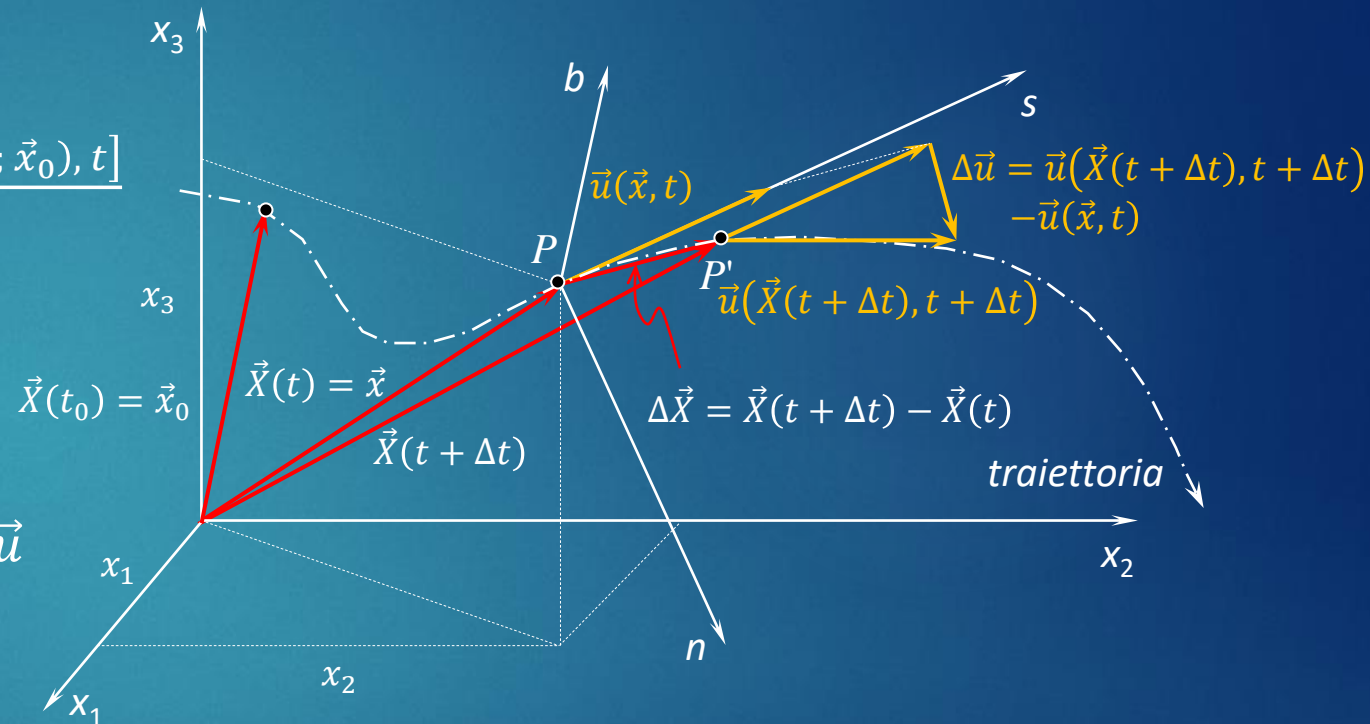
- Regola di derivazione Lagrangiana

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

–  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$  accelerazione locale

–  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} u_j$  accelerazione convettiva (nonlineare)

✓ Operatore  $\vec{u} \cdot \nabla \equiv u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$



- Componenti scalari dell'accelerazione (asse  $x_i$ )

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j$$





# Classificazione dei moti

## ► Moti stazionari (o permanenti)

$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \equiv 0$  per le grandezze caratteristiche del campo di moto (velocità  $\vec{u}$ , acceleraz.  $\vec{a}$ , etc...)

- ✓  $\vartheta$  è costante in ciascun punto del campo di moto al trascorrere del tempo
- ✓  $\vartheta$  può variare da punto a punto
- ✓ Moto non stazionario = moto vario

## ► Classificazione dimensionale dei moti

- Moti *tridimensionali* (3D):  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  per  $i = 1, 2, 3$  (moto più generale possibile)
- Moti *bidimensionali* (2D): la descrizione del moto richiede due parametri geometrici
  - Moti piani:  $u_i = u_i(x_1, x_2)$  per  $i = 1, 2$ ;  $u_3 \equiv 0$  (campo di moto identico su piani paralleli a piano  $x_1, x_2$ )
  - Moti assialsimmetrici:  $\vec{u} = \vec{u}(s, r)$  ( $s$  asse del moto;  $r$  coordinata radiale)
- Moti unidimensionali (1D):  $\vec{u} = \vec{u}(s)$  descrizione moto richiede un solo parametro geometrico (*correnti*)

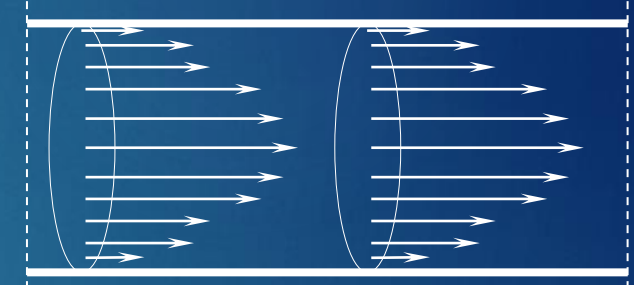
## ► Moti uniformi

- Tutte le particelle in moto rettilineo uniforme
  - ✓ campo di velocità parallele ed equiverse
  - ✓ moduli non necessariamente costanti

m.u. in senso stretto

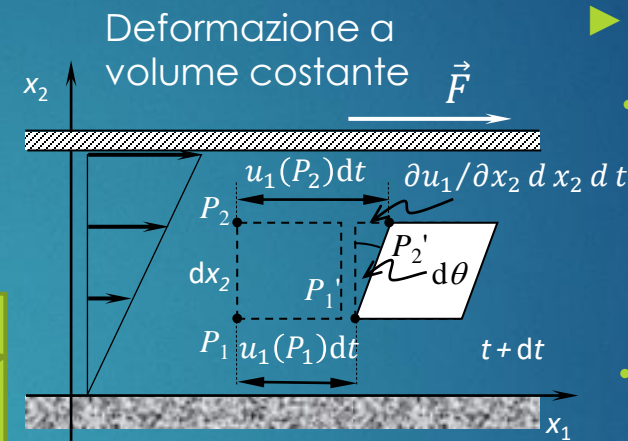
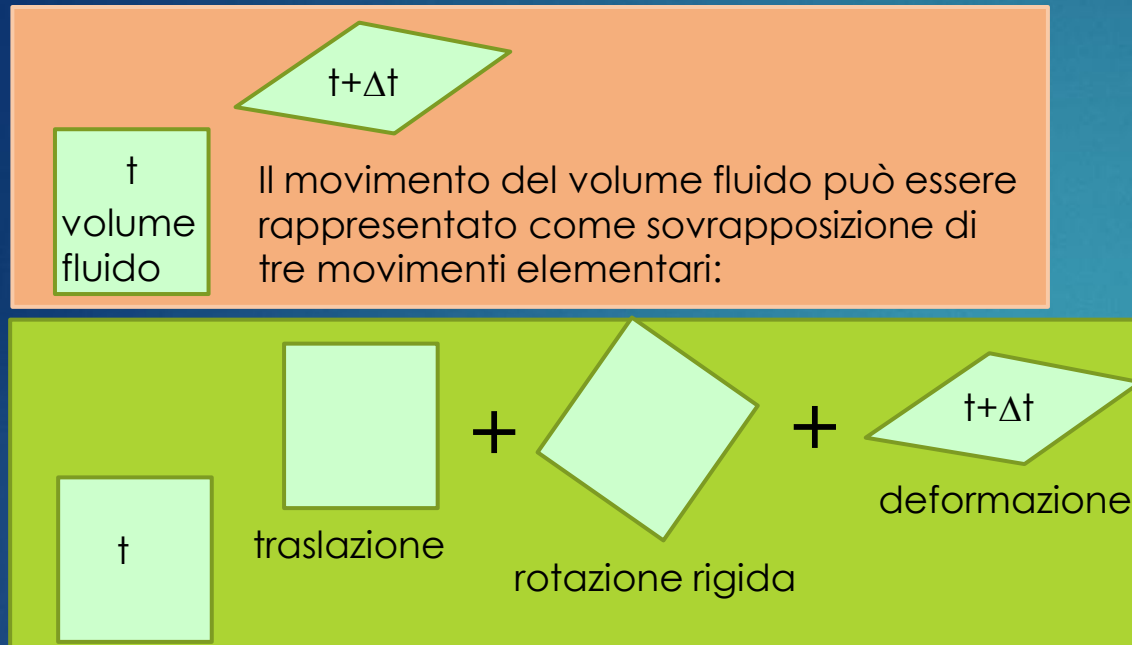


m.u. nel senso dell'idraulica tecnica





# Analisi locale del campo di moto



## ► Velocità di def. a volume cost.

- Moto piano  $u_1(x_2)$ ,  $u_2 = u_3 \equiv 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

- ✓ Rotazione attorno ad asse  $x_3$

- Moto 3D

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i \neq j \neq k$$

- ✓ Rotazione attorno ad asse  $x_k$

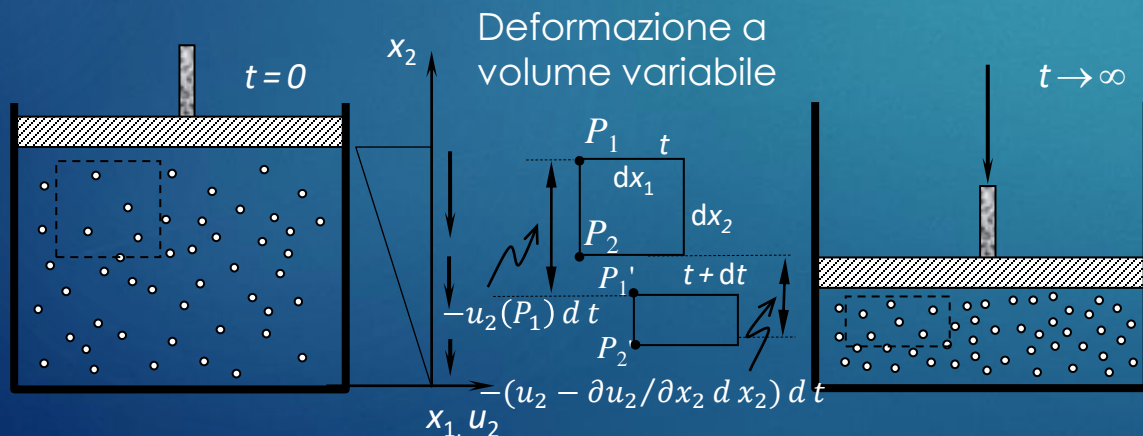
## ► Velocità di deformazione a volume variabile

- Moto piano  $u_2(x_2)$ ,  $u_1 = u_3 \equiv 0$

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{compressione per traslazione differenziale}$$

- Moto 3D

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u}$$

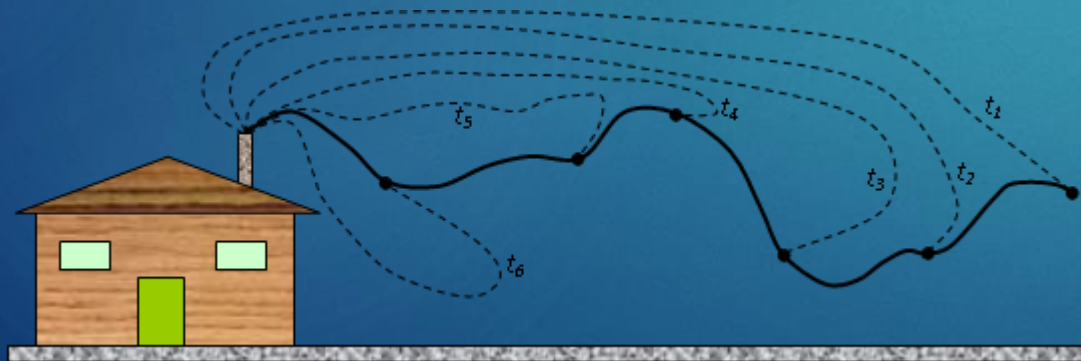
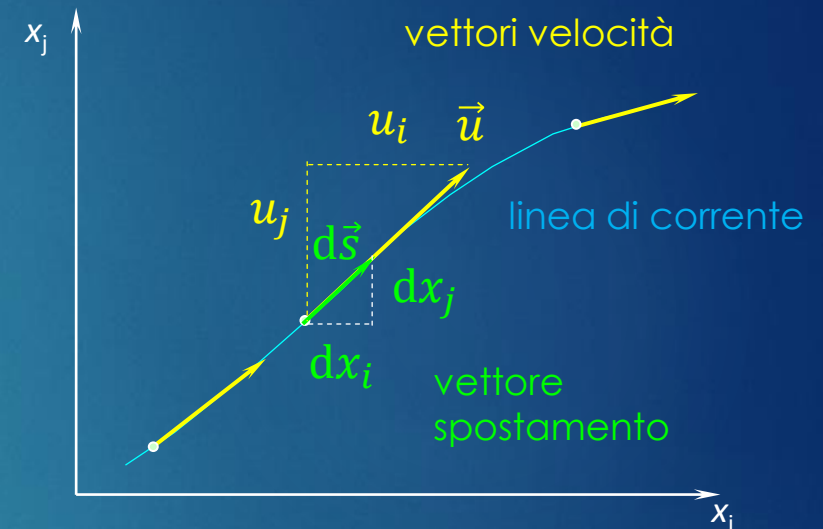


# Linee di corrente e linee di fumo

- *Linee di corrente* (linee di flusso del campo di velocità)
  - Linee tangenti punto per punto al vettore  $\vec{u}$ , definite a  $t$  fissato
  - Vettore  $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)^T$  parallelo a vettore spostamento  $d\vec{s} \equiv (dx_1, dx_2, dx_3)^T$  lungo la tangente alla linea di corrente

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{u_i(x_1, x_2, x_3; t)}{u_j(x_1, x_2, x_3; t)} \quad (\text{due equazioni indipendenti})$$

- ✓  $\infty^2$  l.d.c.  $\forall$  istante  $t$ ;  $\infty^3$  in un intervallo  $\Delta t$  (quante le traiettorie)
- ✓ Moto stazionario  $\longrightarrow$  l.d.c.  $\equiv$  traiettorie



## ► *Linee di fumo (o di emissione)*

- Luogo delle posizioni a un tempo  $t$  di tutte le particelle che sono passate (o passeranno in futuro) per un dato punto dello spazio
- ✓ Immagine fotografica di un pennacchio di fumo
- ✓  $\infty^3$  l.d.f. per ogni istante  $t$ ;  $\infty^4$  in un intervallo  $\Delta t$
- ✓ Moto stazionario  $\longrightarrow$  l.d.f.  $\equiv$  traiettorie  $\equiv$  l.d.c.



# Flussi attraverso superfici

► In un intervallo  $dt$  attraversano la superficie  $dS$ :

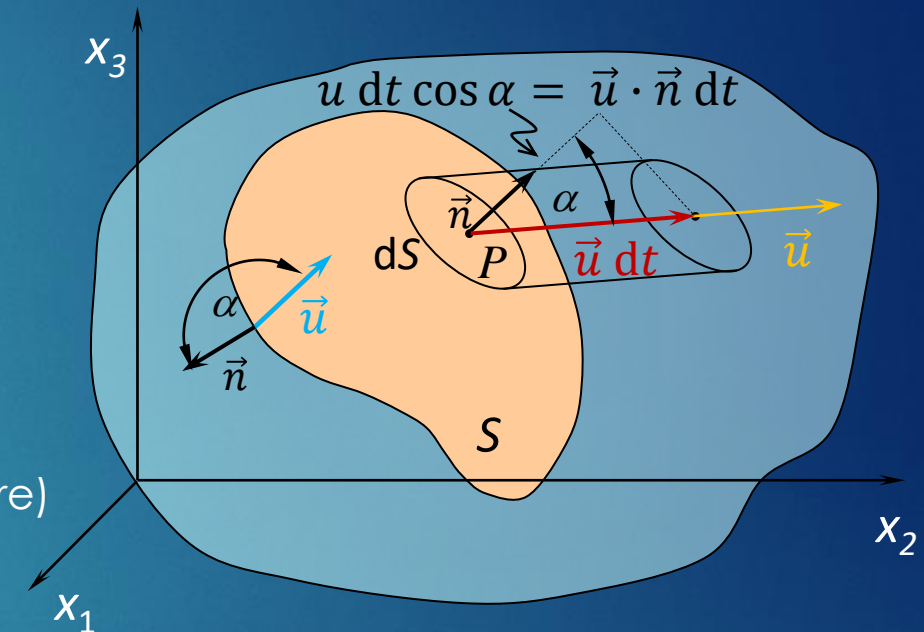
- Volume fluido:  $dV = dS u dt \cos \alpha = dS \vec{u} \cdot \vec{n} dt$
- Massa fluida:  $dm = \rho dV = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS dt$
- Quantità di moto del fluido:  $d\vec{q} = \vec{u} dm = \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS dt$

► Nell'unità di tempo attraversano la superficie  $dS$ :

- Volume:  $dQ = dV/dt = \vec{u} \cdot \vec{n} dS$  (portata elementare)
- Massa:  $dQ_m = \rho dV/dt = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$  (portata massica elementare)
- Quantità di moto:  $d\vec{M} = d\vec{q}/dt = \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS$  (flusso di q.d.m.)

► Nell'unità di tempo attraversano la superficie  $S$ :

- Flusso volumetrico (portata):  $Q = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS$
- Flusso di massa (portata massica):  $Q_m = \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$
- Flusso di quantità di moto:  $\vec{M} = \int_S \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS$

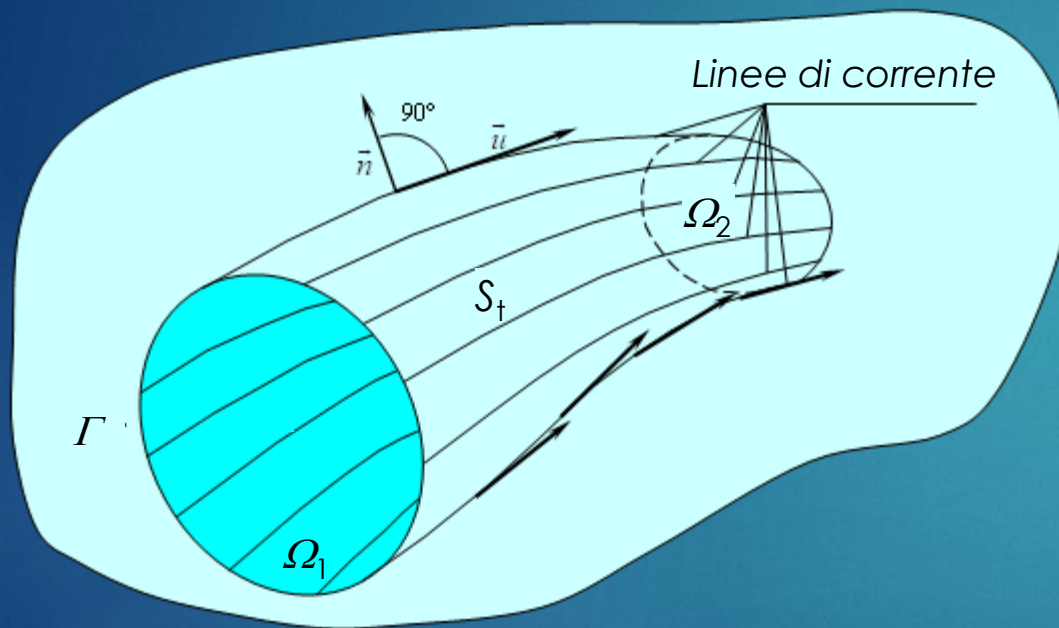


✓  $\vec{u} \cdot \vec{n} > 0$  ➡ attraversamento della superficie nel verso della normale

✓  $\vec{u} \cdot \vec{n} < 0$  ➡ attraversamento della superficie in verso opposto alla normale



# Tubi di flusso



- Tubo di flusso (all'interno di una massa fluida):  
Superficie tubolare costituita da  $\infty^1$  linee di corrente passanti per i punti di una linea chiusa  $\Gamma$ , che non sia a sua volta una linea di corrente
- $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  in ogni punto di un tubo di flusso
- attraverso un tubo di flusso risultano nulli i flussi volumetrico (portata), di massa (portata massica) e di quantità di moto.
- Considerando il volume delimitato dal tubo di flusso, da una superficie  $\Omega_1$  avente per contorno la curva  $\Gamma$  e da una seconda superficie  $\Omega_2$ , potranno aversi portata, portata di massa e flusso di quantità di moto non nulli soltanto attraverso tali due sezioni



# Principio di conservazione della massa

## ► Volume materiale

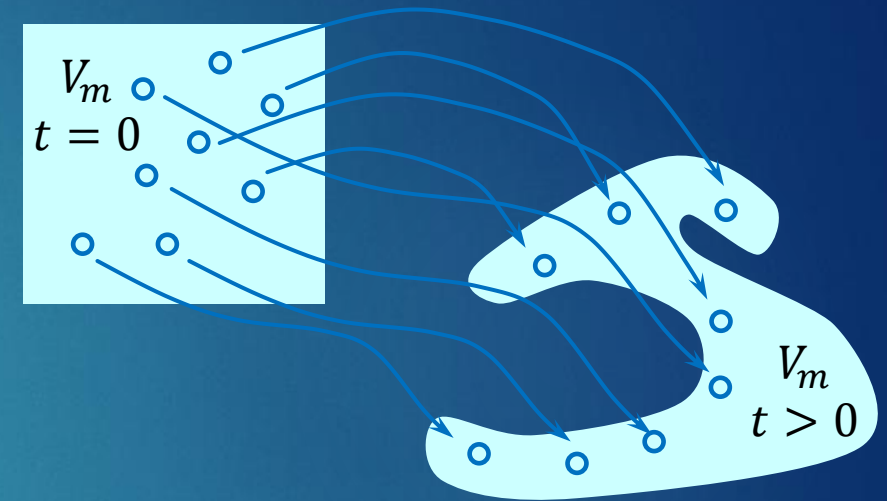
- volume  $V_m$  composto sempre dalle stesse particelle
- ✓  $V_m$  si modifica al trascorrere del tempo
- massa di un volume materiale

$$m = \int_{V_m} \rho \, dV$$

## ► Principio di conservazione della massa

- La massa di una particella non varia nel tempo  $\Rightarrow$  la massa di un volume materiale non varia nel tempo
- Espressione del principio di conservazione della massa

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \, dV = 0$$



- ✓ Il Teorema del trasporto fornisce lo sviluppo della derivata Lagrangiana:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vartheta \, dV$$

- ✓ T.d.t. estensione della regola di derivazione Lagrangiana a una grandezza integrale
- ✓ Il principio di conservazione della massa è esprimibile per via diretta in forma Euleriana



# Equazione globale di continuità

## ► Bilancio di massa su un volume di controllo

Il flusso di massa netto entrante (somma algebrica di flussi entranti e flussi uscenti) in un volume di controllo  $V_c$  è pari alla variazione della massa contenuta all'interno del volume di controllo nell'unità di tempo

✓ Formulazione Euleriana del p. di conservazione della massa

- Massa netta entrante (convenzione di normale esterna)

$$- \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

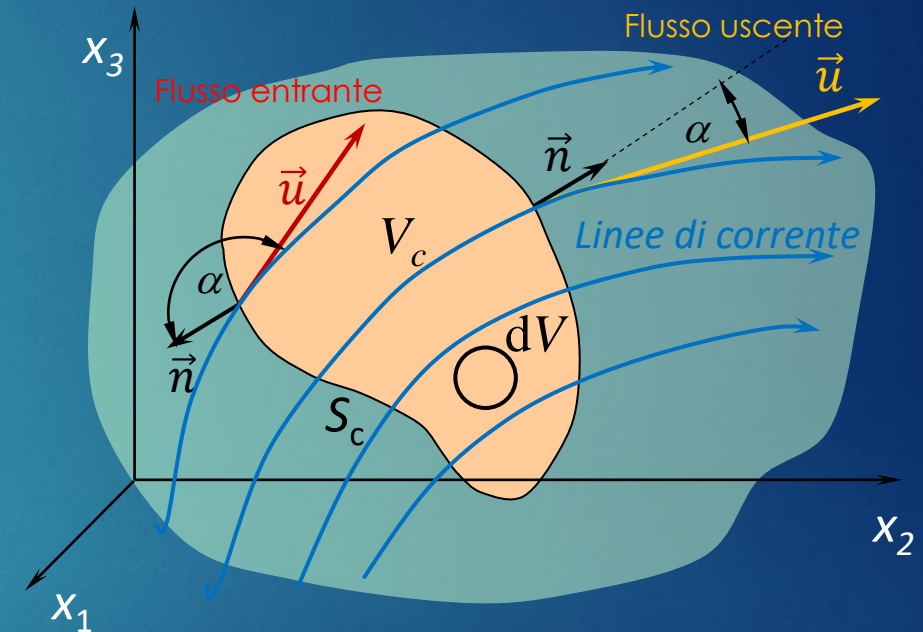
- Massa contenuta nel volume di controllo

$$m = \int_{V_c} \rho dV$$

- Variazione della massa contenuta in  $V_c$  nell'unità di tempo

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (V_c = \text{cost})$$

- Bilancio:  $-\int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$



$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

# Equazione globale di continuità

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

## ► Casi particolari

- Moto stazionario ( $\partial \rho / \partial t = 0$ )

$$\int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

- Fluido incompressibile, isoterma e omogeneo ( $\rho = \text{cost}$ )

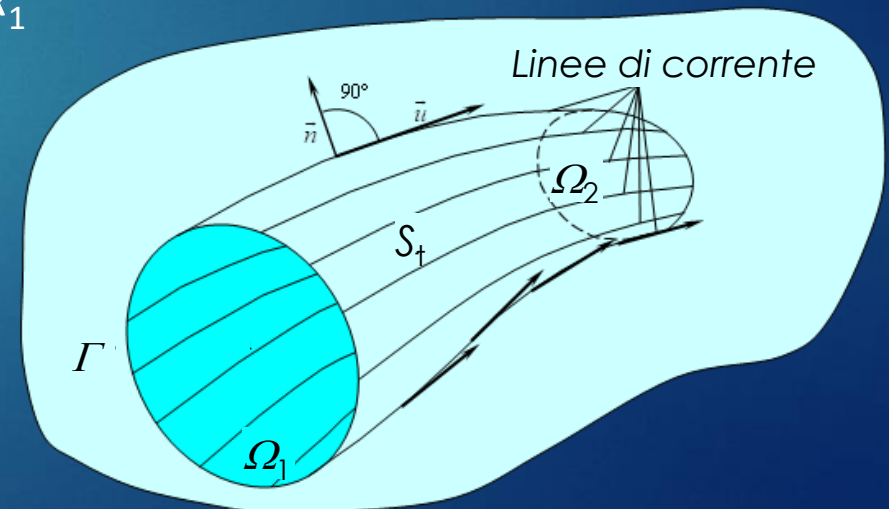
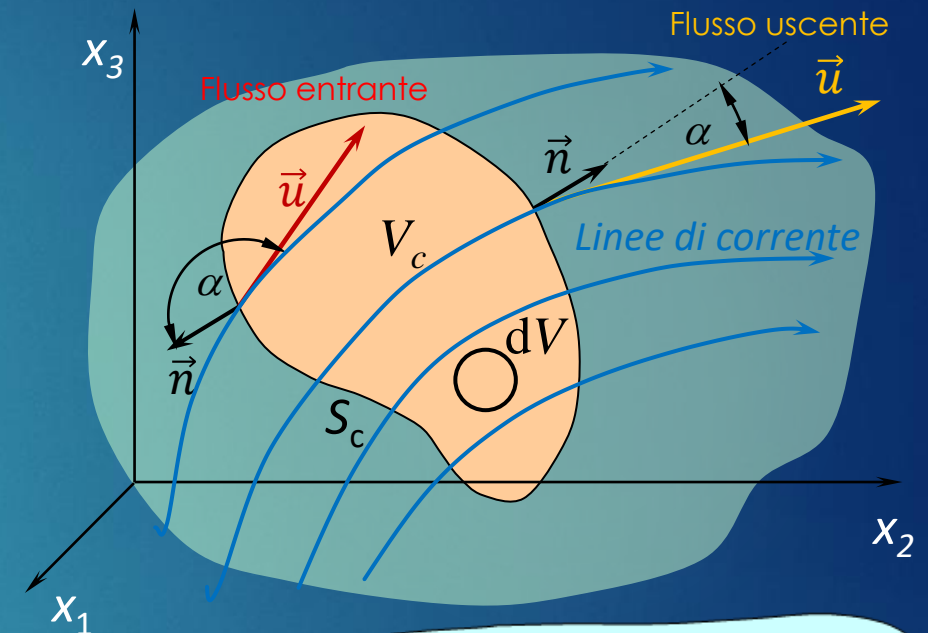
$$\int_{S_c} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

✓ anche istantaneamente per moto vario

## ► Applicazione a tubi di flusso (moto stazionario)

$$\int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_f} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_{m_1} = Q_{m_2}$$








# Equazione indefinita di continuità

## ► Bilancio di massa su un volume di controllo

Flusso di massa netta entrante in un volume di controllo  $dV_c$  pari alla variazione della massa contenuta all'interno del volume nell'unità di tempo

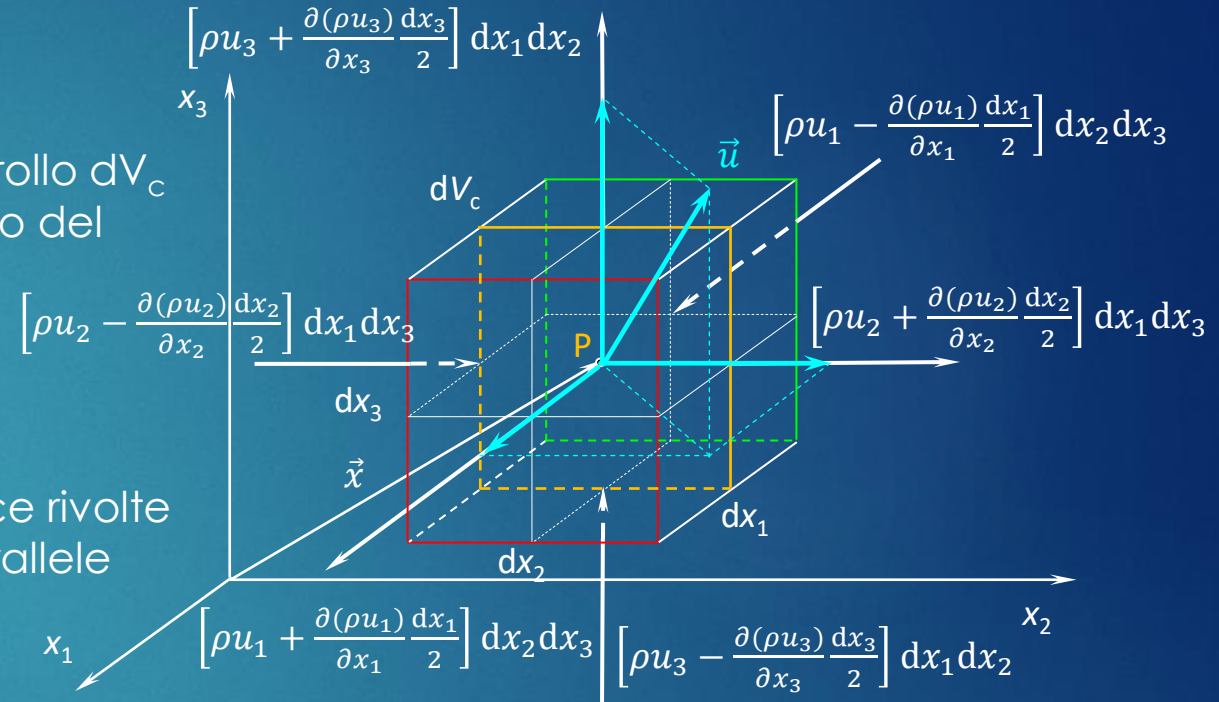
- $dV_c$  parallelepipedo con lati infinitesimi
- facce  $dV_c$  perpendicolari ad assi coordinati
- Schema  $u_i > 0 \ i=1,2,3$   flussi uscenti da facce rivolte nel verso delle  $x_i$  crescenti, entranti da facce parallele
- Flussi di massa su superfici  $\perp$  asse  $x_1$  ( $\vec{n} = \vec{b}_1$ ):

– contenente P:  $\int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \rho \vec{u} \cdot \vec{b}_1 dS = \rho u_1 dx_2 dx_3$

– verso  $x_1$  crescenti (uscente):  $\left[ \rho u_1 + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right] dx_2 dx_3$

– verso  $x_1$  decrescenti (entrante):  $\left[ \rho u_1 - \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right] dx_2 dx_3$

– Netto entrante:  $-\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = -\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} dV_c$



- Flusso netto di massa entrante totale

$$-\left[ \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} \right] dV_c =$$

$$-\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dV_c = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV_c$$





# Equazione indefinita di continuità

- Massa contenuta nel volume di controllo  $V_c$

$$dm = \rho dV_c$$

- Variazione della massa di  $V_c$  nell'unità di tempo

$$\frac{\partial(dm)}{\partial t} = \frac{\partial \rho dV_c}{\partial t} = dV_c \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (V_c = \text{cost})$$

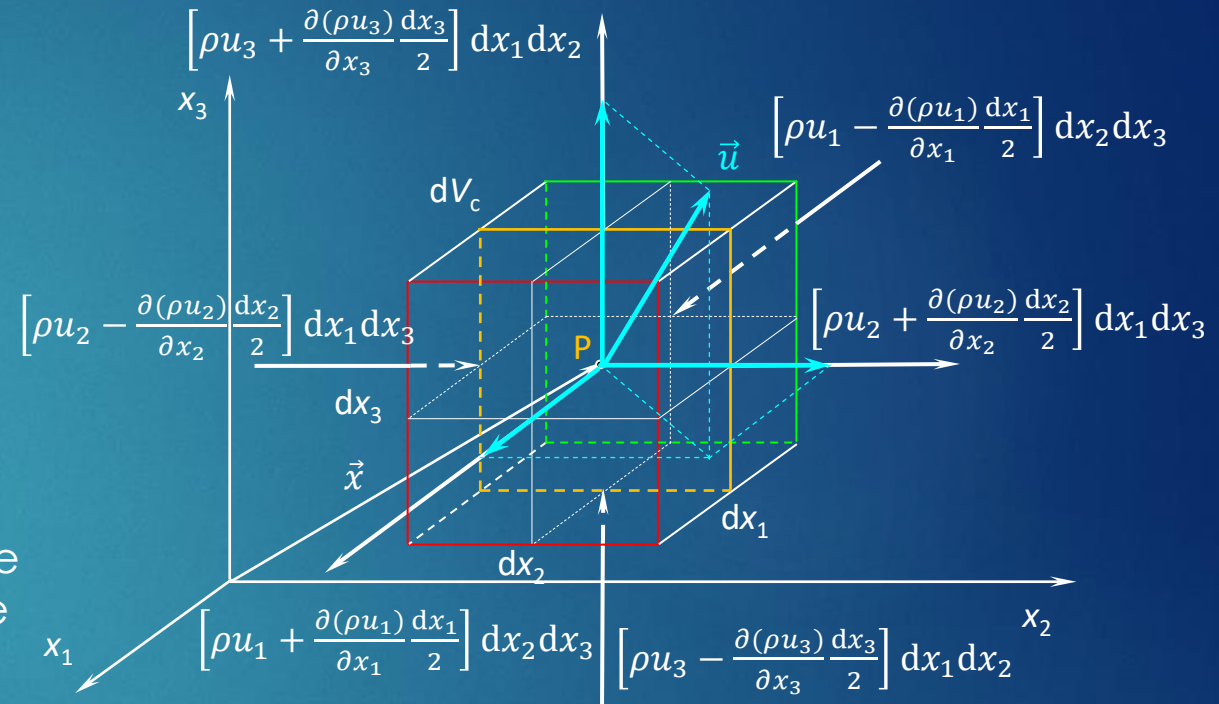
- Bilancio di massa

- Flusso di massa netta entrante pari alla variazione nell'unità di tempo della massa interna al volume

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3}\right] dV_c = dV_c \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$



- Espressione in funzione di  $D\rho/Dt$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$



# Equazione indefinita di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

## ► Casi particolari

- Moto stazionario

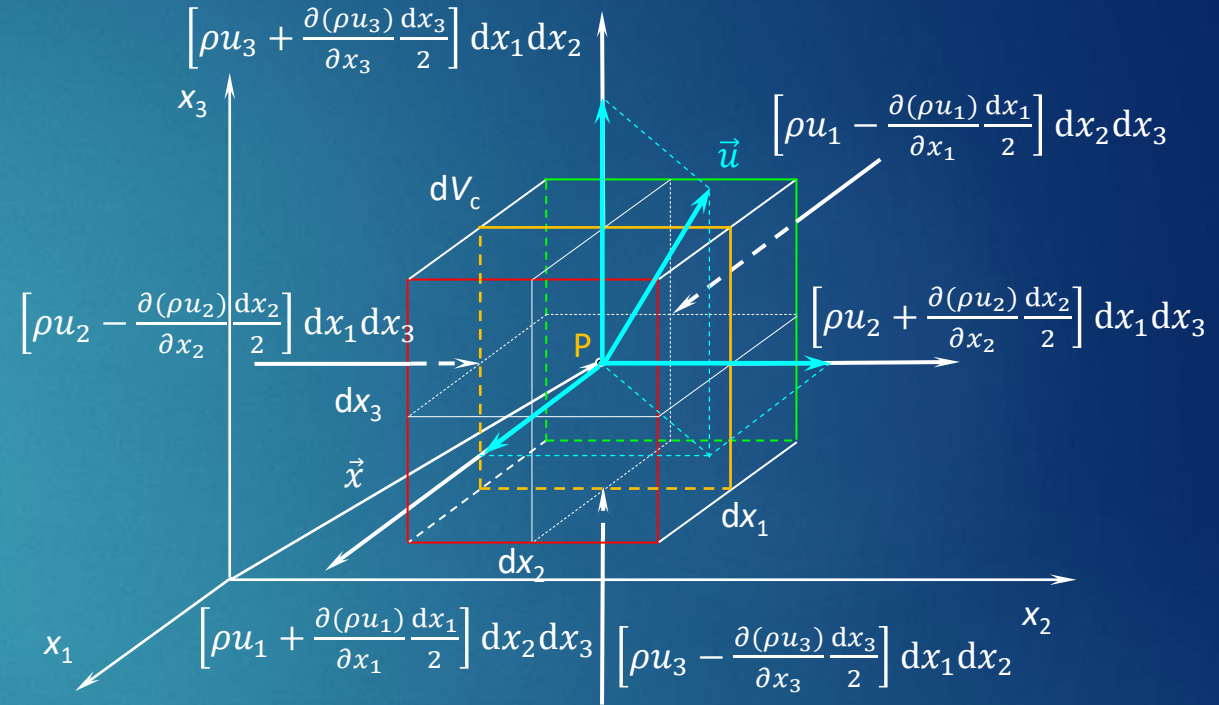
$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

- Fluido incompressibile,  $\rho$  non uniforme, scambi termici e di soluti trascurabili ( $D\rho/Dt = 0$  per ciascuna particella)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

- A maggior ragione, se fluido incompressibile, isoterma e omogeneo ( $\rho = \text{cost}$ )

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$



- ✓ Per fluido incompressibile si ritrova il risultato ottenuto dall'analisi del campo di moto

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \nabla \cdot \vec{u} = 0$$



# Equazioni di continuità

- Legame fra forma locale e forma globale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{V_c} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV = 0$$

- ✓ Teorema della divergenza  $\int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$

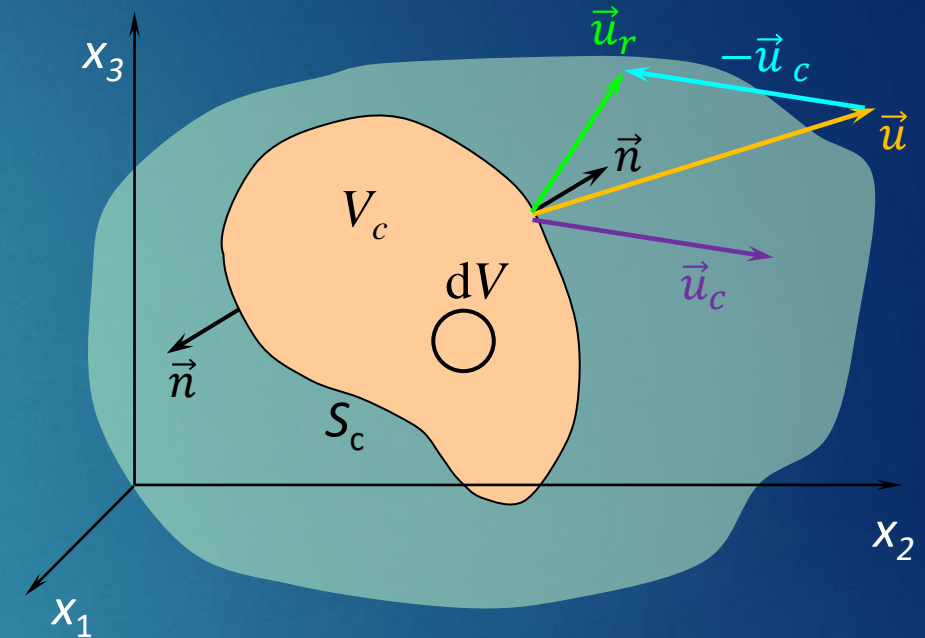
$$\int_{V_c} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

- Teorema del trasporto (o di Reynolds)

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho dV = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

- ✓ deducibile dal Teorema del trasporto

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vartheta dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \vartheta dV + \int_{S_c} \vartheta \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$



- ✓ Forma T.d.t. per volume di controllo mobile

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vartheta dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \vartheta dV + \int_{S_c} \vartheta \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS$$

- $\vec{u}_r = \vec{u} - \vec{u}_c$  velocità relativa fluido rispetto a  $V_c$
- $\frac{d}{dt}$  tiene conto del moto del volume di controllo